2019. április 9., kedd

1. Feladat Határozzuk meg az összes olyan (a, b, c) valós számhármast, amelyre $ab + bc + ca = 1$ és

$$a^2b + c = b^2c + a = c^2a + b.$$

2. Feladat Legyen n pozitív egész. Egy $2n \times 2n$-es táblára dominókat helyezünk le úgy, hogy a tábla minden mezője pontosan egy dominóval fedett mezővel szomszédos. Határozzuk meg minden n-re az ilyen módon lerakható dominók számának lehető legnagyobb értékét!

(A *dominó* egy 2×1-es vagy 1×2-es téglalap. A dominókat úgy helyezzük le a táblára, hogy minden dominó pontosan két mezőt foglaljon el a táblán, és ne legyenek átfedőek. Két mezőt *szomszédosnak* hívunk, ha különbözőek és van közös oldaluk.)

3. Feladat Legyen az ABC háromszögben $CAB\sphericalangle > ABC\sphericalangle$ és jelöljük I-vel a háromszög beírt körének középpontját. Legyen D a BC szakasz azon pontja, amelyre $CAD\sphericalangle = ABC\sphericalangle$. Jelöljük az I-n átmenő, AC-t A-ban érintő kört ω-val. Legyen az ω és az ABC háromszög körülírt körének A-tól különböző metszéspontja X. Bizonyítsd be, hogy a $DAB\sphericalangle$ és a $CXB\sphericalangle$ szögek szögfelezői a BC egyenesen metszik egymást.

Megoldási idő: 4 óra 30 perc.
Minden feladat 7 pontot ér.

2019. április 10., szerda

4. Feladat Legyen az ABC háromszög beírt körének középpontja I. Jelöljük az AB oldal és a B-n átmenő AI-t I-ben érintő kör B-től különböző metszéspontját P-vel. Jelöljük az AC oldal és a C-n átmenő AI-t I-ben érintő kör C-től különböző metszéspontját Q-val. Bizonyítsuk be, hogy ekkor PQ érinti az ABC háromszög beírt körét.

5. Feladat Legyen $n \geq 2$ egész szám, és legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitív egész számok. Mutassuk meg, hogy léteznek $b_1, b_2, \ldots, b_n$ pozitív egész számok, amelyekre a következő három feltétel teljesül:

(A) $a_i \leq b_i$ minden $i = 1, 2, \ldots, n$-re;

(B) $b_1, b_2, \ldots, b_n$-nek n-nel való osztási maradékai páronként különbözőek; és

(C) $b_1 + \cdots + b_n \leq n\left(\frac{n-1}{2} + \left\lfloor \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \right\rfloor\right)$.

($\lfloor x \rfloor$ a valós szám x egészrészét jelöli, tehát a legnagyobb egész számot, ami nem nagyobb, mint x.)

6. Feladat Egy körbe Alina 2019 húrt rajzolt, különböző végpontokkal. Egy pontot *megjelöltnek* tekintünk, ha

(i) a 4038 húr-végpont valamelyike; vagy

(ii) legalább két húr metszéspontja.

Alina minden pontot feliratoz. A 4038 pontból ami az (i) feltételnek felel meg, Alina 2019 pontot 0-val feliratoz, és a maradék 2019 pontot 1-gyel. Az (ii) feltételnek megfelelő pontokat egy tetszőleges (nem feltétlenül pozitív) egész számmal látja el.

Alina minden húron a szomszédos megjelölt pontok közötti szakaszokat vizsgálja. (Egy húr k megjelölt ponttal $k-1$ ilyen szakaszt tartalmaz.) Minden ilyen szakaszra sárgával felírja a szakasz végpontjainak összegét és kékkel felírja a végpontok különbségének abszolút értékét.

Alina azt találja, hogy az $N+1$ sárga felirat a $0, 1, \ldots, N$ értékek mindegyikét pontosan egyszer veszi fel. Mutassuk meg, hogy legalább egy kék felirat osztható 3-mal!

(A *húr* a körvonal két különböző pontját összekötő egyenes szakasz.)

Megoldási idő: 4 óra 30 perc.
Minden feladat 7 pontot ér.