4. Olimpiai válogatóverseny,
2023. április 25.

4. A pozitív valós számokból álló $a_1, a_2, \ldots$ végtelen sorozatra

$$a_{n+1}^2 + a_n a_{n+2} \leq a_n + a_{n+2}$$

teljesül minden pozitív egész n esetén. Mutassuk meg, hogy $a_{2022} \leq 1$.

5. Legyenek a és d egymáshoz relatív prím, 1-nél nagyobb egész számok. Definiálunk egy sorozatot: $x_1 = 1$, és minden $k \geq 1$ esetén

$$x_{k+1} = \begin{cases} x_k/a & \text{ha } x_k \text{ osztható } a\text{-val;} \\ x_k + d & \text{különben.} \end{cases}$$

Adott a és d esetén határozzuk meg a legnagyobb pozitív egész n számot, amelyre létezik olyan k index, hogy x_k osztható a^n-nel.

6. Legyen $\mathbb{Z}^n$ az egész számokból álló, n tagú sorozatok (azaz vektorok) halmaza. Ha

$$\mathbf{u} = (u_1, ..., u_n)$$

és

$$\mathbf{w} = (w_1, ..., w_n)$$

két ilyen vektor, akkor legyen

$$\mathbf{u} + \mathbf{w} = (u_1 + w_1, ..., u_n + w_n)$$

és

$$\mathbf{u} \vee \mathbf{w} = (\max(u_1, w_1), ..., \max(u_n, w_n)).$$

Kiindulásként felírtuk a táblára $\mathbb{Z}^n$-nek s darab elemét. Ha egy adott pillanatban a (nem feltétlenül különböző) $\mathbf{u}$ és $\mathbf{w}$ vektorok már fel vannak írva a táblára, akkor az $\mathbf{u} + \mathbf{w}$ és $\mathbf{u} \vee \mathbf{w}$ vektorokat is fel szabad írni a táblára. A kiindulási vektorok olyanok voltak, hogy $\mathbb{Z}^n$ bármely eleme felírható véges sok lépéssel. Mi az s legkisebb lehetséges értéke, ha $n = 2022$?

Az IMO szabályai szerint ezt a feladatsort a 2023. évi IMO utolsó napjáig, 2023. július 13-ig nem szabad nyilvánossá tenni, az interneten megosztani.