3. Olimpiai válogatóverseny,
2023. április 24.

1. A hegyesszögű ABC háromszögben $AC > AB$. Legyen O a körülírt kör középpontja, D pedig a BC szakasz egy pontja. A D ponton átmenő, BC-re merőleges egyenes az AO, AC és AB egyeneseket rendre a W, X és Y pontokban metszi. Legyen az AXY és ABC háromszögek köré írt körök A-tól különböző metszéspontja Z. Bizonyítsuk be, hogy ha $OW = OD$, akkor DZ érinti az AXY háromszög köré írt kört.

2. Kezdetben van n kupac kő, mindegyik kupac egyetlen kőből áll. Egy lépésben kiválasztunk két kupacot, mindkettőből elveszünk egyenlő számú követ, és az elvett kövekből egy új kupacot hozunk létre. Minden pozitív egész n esetén határozzuk meg a legkisebb olyan k számot, amelyre véges sok lépéssel elérhető, hogy a nem-üres kupacok száma k legyen.

3. Tetszőleges $1 \leq i \leq 9$ és $T \geq 1$ egészek esetén legyen $d_i(T)$ az i számjegy összes előfordulásainak száma, ha felírjuk 1829-nek az összes, T-nél nem nagyobb pozitív többszörösét a tízes számrendszerben. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok olyan $T \geq 1$ egész szám van, amelyre a $d_1(T)$, $d_2(T)$, ..., $d_9(T)$ számok között pontosan két különböző érték szerepel.

Az IMO szabályai szerint ezt a feladatsort a 2023. évi IMO utolsó napjáig, 2023. július 13-ig nem szabad nyilvánossá tenni, az interneten megosztani.